連載 ポイントを押さえて実機の設計に活かす

力学の考え方 基礎と応用

米屋技術士事務所
金友 正文*
＊かねとも まさふみ：代表 技術士（機械部門、情報工学部門）
URL：https://www.kbtkomeya.com/

第8回 振動方程式の数値計算と静圧空気軸受の不つり合い振動

はじめに

振動方程式は、質量と変位の2回微分である加速度のかけ算による力とばねの変形などで生み出す力のつり合いを記述した等式である。この式は、力学におけるダイナミック問題である時間とともにその位置が変化する現象を説明できる。この方程式で示された微分値は、機械技術者がなじみの深い、材料の引張線図の応力とひずみの関係の傾きであるヤング率に相当する。ヤング率は応力ひずみ線図が実験的に得られれば、その接線を引くことで簡単に求められるが、力のつり合いで書かれた方程式は、この方法によってその解を求めることはできない。この方程式の解法は、解析的な方法とこれから説明する数値計算がある。

数値計算の原理は、先人たちが考え出した巧みな方法であるが、工学の分野で使い物になり始めたのは、計算機が発明されてからである。特にわれわれになじみの深いパソコンは、CAD、数値計算と制御の分野で機械設計作業を大きく変えた。筆者は、このパソコンがダイナミックス力学の教科書を同様に変えると考えている。例えば古い教科書で、100ページがそのボリュームとすれば、20ページに方程式の導入が記載されており、残りの80ページはこの方程式を解析的に解く手法が記されている。一方、数値計算の支援を受けたテキストは、80ページが現象と方程式の説明で、残り20ページは数値計算を用いて方程式を解く方法を説明する。したがって、設計者の学びの時間は方程式の理解に費やして、方程式を解くための数値計算による汎用的な方法は20ページ程度となるわけである。

今回、ルンゲクッタと呼ばれる常微分方程式の汎用的な解法と、これを用いた静圧空気軸受の不つり合いによる振動問題の事例を説明する。

数値計算で微分方程式を解く規則（ルンゲクッタ法の規則）

1. 1階の微分方程式の数値計算による解法

先に、1階の常微分方程式を数値計算で解くための方法を説明し、続いて、2階の常微分方程式に移ることにする。計算対象として数学のテキストに書いてある方程式を用いるのは無味乾燥なので、世間を騒がせている感染症（コロナ問題）の現象を表す微分方程式を示し、これを数値計算で解く手法を説明する。

感染症は、その感染の現象を説明するために次のような規則を用いる。