連載

製品・システムの複合化に対応した設計を支援

対話形式で解きほぐす Modelica活用法

第15回 電気系のモデリング

明治大学　大富　浩一*　　Modelica Association　平野　豊**

*おおとみ　こういち：理工学部機械情報工学科　客員研究員

**ひらの　ゆたか：1984年、トヨタ自動車㈱入社、シャシー設計、車両運動制御、モデルベース開発、人工知能、ロボット、人間特性などの研究開発に従事。現在は、自動運転、スマートシティ関連の新事業、新技術開発に従事。自動車技術会、日本機械学会、計測自動制御学会、Modelica Associationの会員。

電気系のモデリングについて紹介する。電気とはどういう現象か、電気回路とは、電気回路を構成する3つの回路素子、電気回路に関するキルヒホッフの法則について説明するとともに、電気回路と振動回路（MCKモデル）の類似性にも触れる。続いて、Modelica標準ライブラリ（MSL）を用いた電気系のライブラリの基本構成、電気系の種々のライブラリの基本的使い方、モデル例について説明する。

電気の基本について教えてください

電気のAC回路に関する説明はファインマンの物理学[1),2)]に詳しく記述されているが、ここではその要約ともいえる文献[3),4)]を元に以下説明を行う。まず、**図1**に示す3つの回路素子を考える。

以下、3つの回路素子について説明する。

キャパシタ：

金属板2枚を少し離して、その間に絶縁物を挿入、これらの平板が荷電されるとその間に電圧（電位差）が生じる。平板にそれぞれ$+q$および$-q$の電荷があると、この間には電圧Vが存在する。これは下式で与えられる。

$$V=\frac{qd}{\varepsilon_0 A}$$

ここに、dは平板の間隔、Aは面積、ε_0は誘電率である。このように電位差は電荷に比例する。

$$V=\frac{q}{C}、\qquad C=\frac{\varepsilon_0 A}{q}$$

ここに、Cが容量である。

レジスタ：

電流の流れに抵抗する要素で、例えば、ある物質の両端に電位差があると、電位差に比例した電流Iが生じる。

$$I=\frac{dq}{dt}、\qquad V=RI=R\frac{dq}{dt}$$

この比例定数を抵抗Rという。上式はいわゆるオームの法則である。

インダクタ：

コイルに電流が流れるとその内部に磁場が生じる。磁場が時間とともに変化すると電流の時間変化に比例した電圧がコイルに作用する。すなわち、磁場は電流に比例し、コイル内の誘導電圧は電流の時間変化に比例する。

$$V=\frac{LdI}{dt}=\frac{Ld^2q}{dt^2}$$

比例定数Lを自己インダクタンスという。

次に、**図2**に示すように以上の3種類の回路要素を直列につないで回路をつくる。このとき全体

図1　3つの回路素子

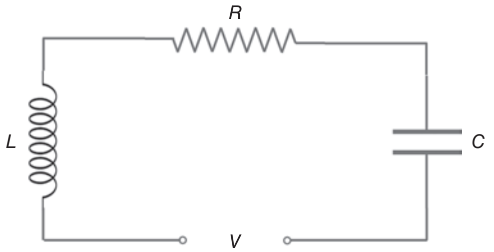


図2　3つの回路素子からなる電気回路

にかかる電圧Vは、回路を通って1つの電荷qが運ぶときにする仕事に等しく、

$$\text{インダクタ}：V_L = L\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\text{レジスタ}\quad：V_R = R\frac{dq}{dt}$$

$$\text{キャパシタ}：V_C = \frac{1}{C}q$$

となり、これらの和が当てられた電圧Vに等しい。

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V(t)$$

この式は振動の式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

とまったく同じなので解法も同じとなる。すなわち、電圧Vが各振動数ωで、正弦波で変動している場合は(便宜上、同じ変数表現Vおよびqを使用すると)

$$\left[L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C}\right]q = V$$

これより

$$q = \frac{V}{L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C}}$$

もしくは

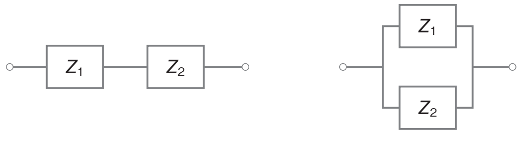
$$q = \frac{V}{L(\omega_0{}^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

ここに、

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}、\qquad \gamma = \frac{R}{L}$$

このように振動系と同じように、電気系も共振の性質を有する。

一方、一般にはVとqの関係よりもVとIの関係



(a) 直列　(b) 並列

図3　2つのインピーダンスで構成される回路

を使う場合が多い。そこで、

$$I = \frac{dq}{dt} = i\omega q$$

の関係より、

$$V = \left(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C}\right)I = ZI、$$

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

となる。ここに、Zは複素インピーダンスと呼ばれる。また、次式のように表現する場合もある。

$$\frac{LdI}{dt} + RI + \left(\frac{1}{C}\right)\int^t Idt = V(t)$$

複雑な電気回路の場合はどのようにしたらいいですか

図2のように、インダクタ、レジスタ、キャパシタが直列に結合した回路を考えると、電荷は3つの要素のすべてを通り、電流はこの導線のどこでも同じとなる。したがって、それぞれレジスタ、インダクタ、キャパシタの両端の電圧は

$$\frac{LdI}{dt}、\qquad RI、\qquad \left(\frac{1}{C}\right)\int^t Idt$$

となるので、全電圧はこれらの総和となり、次式のように表現されることはすでに述べたとおりである。

$$V = ZI、\qquad Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

次に、この関係を用いて複雑な回路を表現することを考える。その回路は2つの部分から構成され、それぞれインピーダンスZ_1、Z_2を有していると考える。最初に、**図3**(a)のようにこれらを直列に配置して、この両端に電圧をかけた場合を考える。このとき、各インピーダンスの両端にかかる電圧はそれぞれ

$$V_1 = IZ_1、\qquad V_2 = IZ_2$$