

解説2

Excelを用いた簡単な伝熱の数値シミュレーション

熊本大学 小糸 康志*

*こいと やすし：大学院先端科学研究部 准教授 博士(工学)

はじめに

Excelの表計算機能を利用すると、簡単に伝熱の数値シミュレーションを行うことができる。ExcelシミュレーションはExcelが有する反復計算の機能を利用するものであり、伝熱の基礎方程式と初期条件、境界条件を差分化した式をExcelのワークシートのセルに入力する。入力とともに反復計算が実行され、セルに計算結果が表示されるものである。従来の伝熱の数値シミュレーションでは、差分式を解くためにプログラミングを行っていたが、Excelを利用するとプログラミングの必要がなく、さらに、計算結果をワークシート上でグラフ化できるため、グラフ作成ソフトも不要である。Excelは広く普及している表計算ソフトであり、パソコンで手軽に取り扱うことができるため、伝熱の数値シミュレーションにも有効なツールである。

本稿では、入門編として非定常1次元熱伝導問題を対象とし、Excelによる数値シミュレーション手法を紹介する。具体的に銅プレートの加熱問題を例に挙げ、非定常1次元熱伝導の基礎方程式を初期条件と境界条件のもと、Excelのワークシート1枚で解く手法を紹介する。なお、非定常1次元熱伝導問題以外にもExcelシミュレーションを適用することができる。詳細は具体例とともに書籍¹⁾にまとめられている。

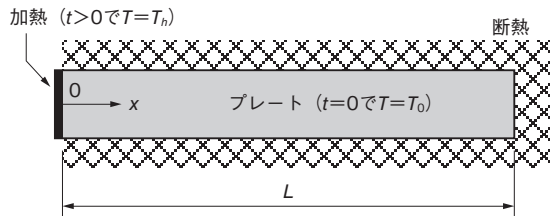


図1 物理モデルと座標系

基礎方程式

数値シミュレーションの対象とする物理モデルと座標系を図1に示した。長さ L のプレートが時間 $t=0$ で一様温度 T_0 に保たれており、 $t>0$ でこのプレートの左面を温度 T_h までステップ的に加熱する。加熱面を除くプレート表面は断熱されており、 x 方向に生じるプレート内の伝熱、すなわち、非定常1次元熱伝導を数値シミュレーションの対象とする。プレートの温度を T 、比熱を c 、密度を ρ 、熱伝導率を λ とすると、 λ が一定のとき、非定常1次元熱伝導の基礎方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \left(a = \frac{\lambda}{c\rho} \right) \quad (1)$$

ここで、 a は温度伝導率である。また、初期条件と境界条件はそれぞれ次式で表される。

$$\text{初期条件: } t=0, 0 \leq x \leq L \text{ で } T=T_0 \quad (2)$$

$$\text{境界条件: } t>0, x=0 \text{ で } T=T_h \quad (3)$$

$$\text{境界条件: } t>0, x=L \text{ で } \partial T/\partial x=0 \quad (4)$$

差分式

シミュレーション対象のプレート内に等間隔(間隔： Δx)で格子点を設け、時間ステップ Δt ごとに計算を進める。位置と時間に関してそれぞれ記号 i, k を用い、プレートの左面と右面を除く内点の格子点の温度を図2に示したように表す。完全陰解法を用いると、式(1)は次式のように差分化される。

$$T_i^{k+1} = \frac{1}{1+2c_x} \{c_x(T_{i+1}^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}) + T_i^k\} \quad (5)$$

$$\left(c_x = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \right)$$

この式は、図2に矢印で示したように、温度 T_i^{k+1} を周辺の3点の格子点の温度 $T_{i+1}^{k+1}, T_{i-1}^{k+1}, T_i^k$ から求める形となっているが、すべての内点に対して適用する差分式である。また、プレートの左面と右面の境界点近傍の格子点の温度を図3に示したように表すと、式(3)、式(4)はそれぞれ次式のように差分化される。

$$T_1^{k+1} = T_h \quad (6)$$

$$T_N^{k+1} = T_{N-1}^k \quad (7)$$

式(6)、(7)はそれぞれ $i=1$ と $i=N$ の境界点に対してのみ適用する差分式である。

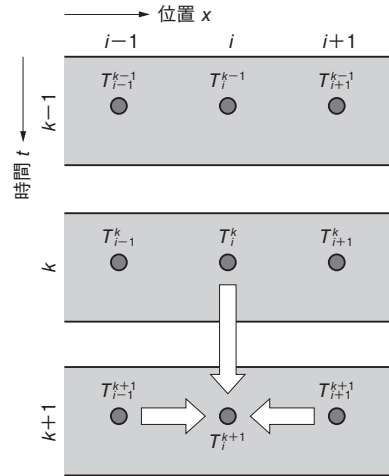


図2 格子点(内点)

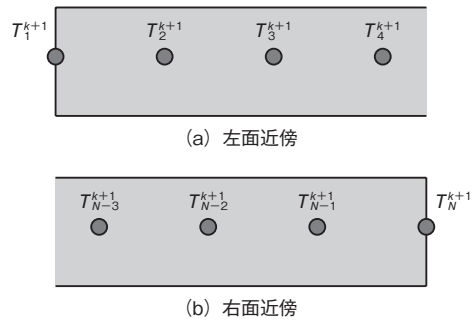


図3 格子点(境界点)

Excelシミュレーション

Excelの反復計算(循環参照)の機能を利用し、ワークシート1枚で式(5)~(7)の差分式を解いて、プレートの温度分布の経時変化を求める。ここでは具体的に、プレートの材質を銅、長さ $L=0.2$ mとし、初期温度 $T_0=25^\circ\text{C}$ 、加熱温度 $T_h=70^\circ\text{C}$ 、格子点間隔 $\Delta x=0.02$ m、時間ステップ $\Delta t=1$ sとしてExcelによる計算手順を記述する。なお、計算に先立ち、反復計算の機能を有効にしておく必要があるため、Excelの画面で[ファイル]タブ→[オプション]と進み、図4に示したようにExcelのオプション画面の「数式」で「反復計算を行う」にチェックを入れておく。



図4 Excelのオプション画面

1. 計算条件の設定

まず、図5に示したように、セル範囲B3~C17に計算条件を入力する。セルC4にはプレートの

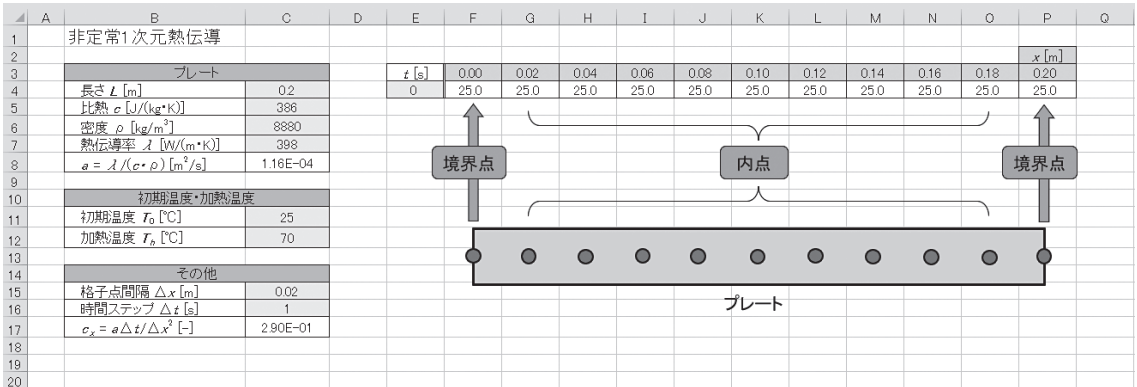


図5 ワークシートの作成例(計算条件の設定)

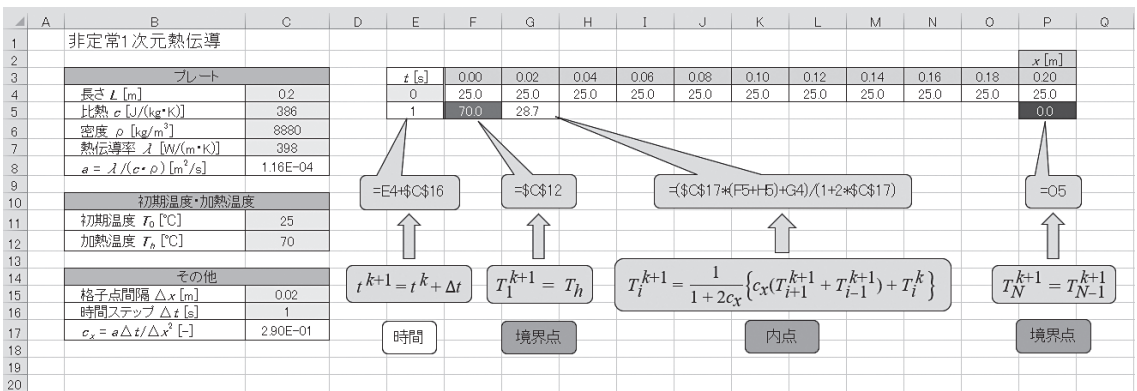


図6 ワークシートの作成例(計算の実行)

長さ L が入力されている。また、プレートの材質を銅としているため、セル C5, C6, C7 にそれぞれ銅の比熱 c 、密度 ρ 、熱伝導率 λ が入力されており、これらの物性値から温度伝導率 a の値をセル C8 で求めている。セル C11, C12 には初期温度 T_0 と加熱温度 T_h 、セル C15, C16 には格子点間隔 Δx と時間ステップ Δt が入力されている。セル C17 では式(5)に含まれている定数 c_x の値を求めている。

次に、ワークシートのセルを格子点とみなし、セル範囲 F4~P4 にプレートの初期温度を入力する。ここでは、F4~P4 の全セルに「 $=\$C\11 」と入力している。また、初期状態 ($t=0$) であるため、セル E4 に「0」を入力しており、以降の計算には不要であるが、格子点の位置をわかりやすくするために、セル範囲 F3~P3 に格子点の x 座標を表示している。E列~P列の5行目以下で $t > 0$ の計算を行

う。

2. 計算の実行

まず、時間ステップ Δt 後の時間を計算するために、図6に示したように、セル E5 に「 $=E4+\$C\16 」と入力する。次に、プレートの左面は等温加熱、右面は断熱の境界条件が与えられているため、式(6)、(7)をそれぞれExcel形式に直してセル F5 に「 $=\$C\12 」、セル P5 に「 $=O5$ 」と入力する。以上で、計算に必要な初期条件と境界条件がすべて与えられた状態となっている。

次に、プレート内の内点の温度を計算するためにセル G5 を選択し、式(5)をExcel形式に直した次式を入力する。

$$=(\$C\$17*(F5+H5)+G4)/(1+2*\$C\$17) \quad (8)$$

続いて、セル G5 をコピーし、セル範囲 H5~O5 にペーストすると、自動的に反復計算が実行され、