解説1

伝熱の基本三形態と熱交換器理論のポイント

九州工業大学　鶴田　隆治*

*つるた　たかはる：大学院工学研究院　機械知能工学研究系　教授

はじめに

熱設計を行うには，エネルギー保存則である熱力学の第一法則と，エントロピー生成を最小限にするための熱力学の第二法則，そして熱輸送量を記述する伝熱学の知識が必要である。熱力学の第二法則については，熱交換器設計の最適化の考え方においてその役割は大きいが，あまり一般的ではないため，ここでは触れず，エネルギーの保存則を記述するために必要となる伝熱の基本三形態を中心に要点を整理するとともに，熱交換器設計の基本的な手法について紹介する。したがって，すでに伝熱の基礎を理解されている方においては，この解説は読み飛ばされてもよい内容である。

伝熱の基本三形態

熱輸送の速度論を展開するのが伝熱学であり，その熱輸送の形態は大きく3つに分類され，伝熱の基本三形態と呼ばれる。その1つは熱伝導，2つ目は対流伝熱(熱伝達)，3つ目が放射伝熱(あるいは輻射伝熱)である(**図1**)。以下にそれぞれの基本法則と熱輸送量の記述法について解説する。

伝熱の基本三形態
- 熱伝導
  - フーリエの法則
- 対流伝熱（熱伝達）
  - ニュートンの冷却の法則
- 放射（輻射）伝熱
  - ステファン・ボルツマンの法則

図1　伝熱の基本三形態

1. 熱伝導

固体と液体，気体などの物質の内部で生じる熱輸送機構のことを熱伝導という。微視的には，物質を構成する分子や原子の熱運動の伝播現象であり，格子振動や自由電子の熱輸送など，やや複雑な機構であるが，ここでは巨視的な観点から熱伝導現象を記述する。その基本法則がフーリエの法則である。すなわち，単位時間当りに物体内を輸送される熱エネルギー量を伝熱量と呼んでQと表せば，川の流れが勾配と面積に比例するのと同じように，温度勾配と伝熱面積に比例し，次式で表現される。

$$Q=\lambda\frac{\Delta T}{L}A \qquad [\mathrm{W}] \tag{1}$$

ここで，**図2**に示すように，ΔTは物体の2点間の距離Lにおける温度差であり，川の高度差と同じく，熱輸送に対するポテンシャル差となる。Aは伝熱面積で，熱を輸送する面の面積であり，当

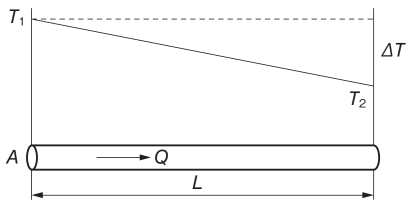


図2　熱伝導(一次元・定常)

然ながら熱流に直交する。比例定数λ［W/(mK)］は熱伝導率と呼ばれ，物質によってほぼ決まる熱物性値である。厳密には温度によって変わるが，多くの場合，ある程度の温度範囲内であれば一定値として扱っても良い。なお，単位伝熱面積当りの伝熱量は熱流束q［W/m^2］と呼ばれる。

2. 対流伝熱（熱伝達）

物体には必ず形状があり，表面がある。その表面には多くの場合に流体が接しており，表面を介して流体との間に熱輸送が生じる。したがって，流れの状況が表面での伝熱量を左右することになり，強制対流や自然対流などに分類して扱う。ただ，いずれの場合も表面における伝熱量はニュートンの冷却の法則と呼ばれる次式で記述される。

$$Q = h\Delta T \cdot A \qquad [\mathrm{W}] \tag{2}$$

ここで，熱輸送のポテンシャルとなる温度差ΔTは物体表面と流体の代表温度との温度差が用いられ，hは比例定数的な意味を持ち熱伝達率と呼ばれ，単位は［W/(m^{2}K)］である。この熱伝達率の値が流体の流れによって決まるため，その推算が重要である。

この解説では，熱伝達率がどのように決まるのかを示すために，非常に大胆な考え方を示して理解を得ることに努め，実際の熱設計という場面でも抵抗感なく，対処できることを期待する。

物体表面での熱輸送では，そこに形成される境界層と呼ばれる薄い領域の振る舞いが重要である。この境界層には速度が変化する速度境界層と，温度が変化する温度境界層がある。後で紹介するが，流体の動粘性係数ν［m^2/S］と温度伝導率a［m^2/S］との比であるプラントル数$Pr = \nu/a$が1の場合には2つの境界層の厚みは一致する。つまり，運動量輸送とエネルギー輸送が同じ挙動を取るときに両境界層の振る舞いは同じと考えて良い。

なお，物体表面では流体の速度はゼロであって静止していると考えられ，その際の流体側の熱伝導による伝熱量は次式で表現できる。

$$Q = -\lambda_f\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{f,\ y=0} A \tag{3}$$

すなわち，表面における流体の温度勾配が大きいほど伝熱量は多くなるから，温度境界層の厚みが薄いほど熱伝達率が大きくなる。つまり，冷たい流体が物体表面に近いほど良く冷え，温かい流体が近いほど良く加熱できることになる。

次の節では，強制対流と自然対流のそれぞれの場合について，熱伝達率と境界層との関係を具体的に示し，それぞれの整理式の考え方を紹介する。

(1)強制対流の熱伝達率はどのように決まるか

たとえば，プラントル数が非常に小さい場合($Pr \to 0$)には，運動量輸送である粘性効果がエネルギー輸送よりも極端に小さいため，物体表面の流れはほぼスリップ流に近いと考えられる。この場合，**図3**に示すように，速度境界層の厚みδが温度境界層の厚みδ_Tと比較して薄く無視できるため，温度境界層内の速度分布は主流の速度U_∞に一様と考えることができる。そこで温度境界層についてエネルギーの保存則を適用すれば，左から流入するエンタルピーと下からの加熱量がxの位置における流出エンタルピーになることから，次の関係が成立する。

$$\rho c_p T_\infty U_\infty \delta_T + \int_0^x \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=o} dx = \rho c_p U_\infty \delta_T \frac{T_w + T_\infty}{2} \tag{4}$$

ここで，流出する流体の温度には直線近似を仮定しており，その平均温度で代表できる。

この式から，平板からの加熱量は

$$Q = \int_0^x \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=o} dx = \rho c_p U_\infty \delta_T \frac{T_w - T_\infty}{2} \tag{5}$$

となり，両辺を位置xで微分すれば，温度境界層について次の微分方程式を得る。

$$\delta_T \frac{d\delta_T}{dx} = 2\frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{1}{U_\infty} \tag{6}$$

これを解くことにより，先端からxの位置にある

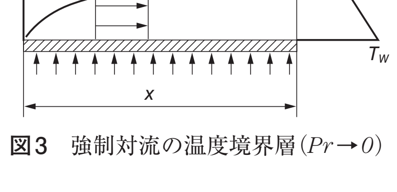


図3　強制対流の温度境界層($Pr \to 0$)

温度境界層の厚みが以下のように求まる。

$$\delta_T = 2\sqrt{a\frac{x}{U_\infty}},\ \ a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \tag{7}$$

ここで，温度境界層の厚みをxで無次元化すれば，

$$\frac{\delta_T}{x} = 2\sqrt{\frac{a}{\nu}\frac{\nu}{U_\infty x}} = 2\sqrt{\frac{1}{Pr}\frac{1}{Re_x}} \tag{8}$$

すなわち，xの位置での局所レイノルズ数Re_xとプラントル数Prの関数として表される。さらに，式(2)と式(3)の関係から，熱伝達率は次式となる。

$$h = \frac{\lambda}{\delta_T} = \frac{\lambda}{2x}\sqrt{Re_x Pr} \tag{9}$$

さらに熱伝達率の無次元数であるヌッセルト数を用いれば，局所ヌッセルト数が

$$Nu_x\left(=\frac{hx}{\lambda}\right) = 0.5 Re_x^{0.5} Pr^{0.5} \tag{10}$$

と表現できる。厳密解と比較すると，係数がわずかに異なる程度である。

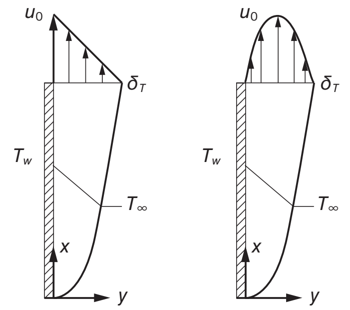
このように，強制対流の熱伝達率を与える無次元式は，流れの様子を表現するレイノルズ数と温度場と速度場の橋渡しをするプラントル数の関数となり，一般には，次の形に表されることが多い。

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n \tag{11}$$

(2) 自然対流の熱伝達率はどうか

強制対流の場合と同様に，自然対流の熱伝達率についても大胆な考え方を用いて温度境界層の振る舞いを検討する。この場合も，まず$Pr \to 0$の場合を考えよう。**図4**(a)に示す鉛直平板からの自然対流（層流）において，粘性がきわめて小さいと物体表面はやはりスリップ流れと考えることができる。が，温度差に基づく浮力対流の場合には温度境界層外縁では浮力がゼロであるために流れはなく，速度境界層と温度境界層は一致する。そこで，浮力が最も大きい物体表面でスリップ流れにより最大の速度u_0とし，温度境界層内の速度分布を直線で近似する。温度分布も直線近似すれば，高さxの位置での温度境界層から上部に流出する流体がこの鉛直平板から受け取ったエネルギーは，

$$Q = \rho c_p \int_0^{\delta_T} u(T - T_\infty)\,dy$$
$$= \frac{1}{3}\rho c_p u_0 (T_w - T_\infty)\delta_T \tag{12}$$



(a) $Pr \to 0$　(b) $Pr \to \infty$

図4　自然対流の温度境界層

となる。平板からの加熱量は，式(5)と同じように表面における熱伝導で記述できるため，式(6)に相当する式として次式を得る。

$$\delta_T \frac{d\delta_T}{dx} = 3\frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{1}{u_0} \tag{13}$$

ここで境界層内の最大速度u_0については，以下のように考える。つまり，粘性が小さい場合には，境界層の運動量方程式

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta\Delta T + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{14}$$

において，左辺の慣性項と右辺の浮力項が釣り合うと考えられる。右辺第一項が浮力項であり，体膨張係数β[1/K]と温度差ΔT，そして重力の加速度g[m/S^2]によって表される。慣性項をu_0^2/xで見積もれば，

$$\frac{u_0^2}{x} \sim g\beta\Delta T,\ \ i.e.\ u_0 \sim \sqrt{g\beta\Delta T x} \tag{15}$$

これを式(13)に代入すると温度境界層の厚みが，

$$\left(\frac{\delta_T}{x}\right)^2 = \frac{12a}{\sqrt{g\beta\Delta T x^3}} = 12 Pr^{-1} Gr_x^{-1/2} \tag{16}$$

と求まる。Gr_xは局所グラスホフ数と呼ばれ，次式で定義される。

$$Gr_x = \frac{g\beta\Delta T x^3}{\nu^2} \tag{17}$$

以上より，$Pr \to 0$の自然対流では，

$$Nu_x = \frac{1}{2\sqrt{3}} Grx^{1/4} Pr^{1/2} \tag{18}$$

と表すことができる。

一方，粘性が大きい$Pr \to \infty$の場合には，物体表面と境界層外縁での速度がゼロと考え，速度分布