第 1 章

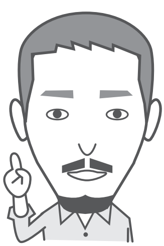
有限要素法概要

　有限要素法は、領域を小さな要素に分割して、力のつり合い等から解を導く手法である。コンピューターを技術開発に利用する手法をComputer Aided Engineering（略してCAE）といい、有限要素法による構造解析、熱伝導解析などもこれに含まれる。現在では、有限要素法は市販のソフトウェアをはじめ、オープンソースのソフトウェアとしても入手可能である。コンピューターの高速化に伴い、構造解析や熱伝導解析を簡単に行えるようになった。CAE を利用して計算することが容易な時代であるが、コンピューターが必ずしも「正しい」結果を出力しているとは限らない。その結果を見て、人が正しい判断ができるという保証もない。

　CAE が出力する結果を「正しく」理解するためには、CAE がブラックボックスであってはならない。コンピューターがどのような計算を行い、ひずみや応力がどのように計算されているかを理解することによって、「正しい」CAE が実現される。有限要素法を理解するための最もよい方法は、簡単でもよいから自分で作ってみることである。全体の中の一部でもわからない部分があれば、プログラムは完成しない。すべての手法を理解することによって、はじめて完動（感動？）するプログラムができあがる。

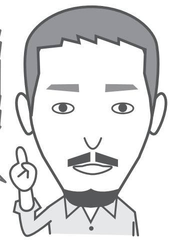
FEM

有限要素法は英語で
Finite Element Method といいますので、
頭文字をとって、FEM と略されます。
本書でも第 2 章以降では「有限要素法」という
言葉の代わりに「FEM」を使用しています。



1.1 有限要素法の基礎

マトリックス(行列)やベクトルであることがわかりやすいように、
数式ではマトリックスを大括弧 [ ] で、
ベクトル(列ベクトル)を中括弧 { } でくくって表記しています。
行ベクトルはベクトルであっても大括弧 [ ] を使います。



3 次元空間内にある微小空間領域を考える。これを要素ということにする。領域を簡易的に平面の三角形であるとすれば、要素は 3 つの辺と 3 つの頂点から構成される。これらの頂点を節点という。いずれかあるいはすべての節点に外力、あるいは強制的な変位が発生し、要素が変形したとする。すると要素の内部にはひずみ $\{\varepsilon\}$ が発生する（**図 1.1**）。一般に、ひずみは座標によって値が異なる空間の関数である。ひずみが発生すると同時に、要素内には応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ が生じる。したがって、応力も空間の関数となる。ひずみと応力は方向を持つの

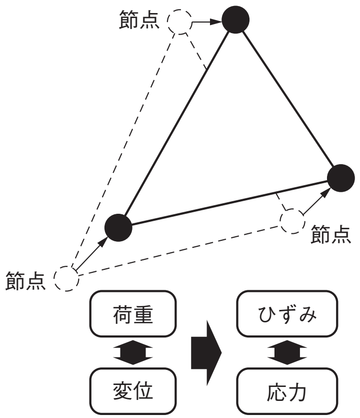
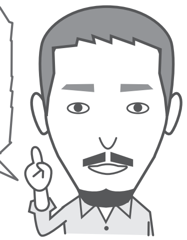


図 1.1　領域の変形とひずみ、応力

で、ベクトル量である。両者は、あるマトリックス $[\boldsymbol{D}]$ によって関連付けられる。

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D}]\{\varepsilon\} \tag{1.1}$$

連続体力学ではひずみや応力はテンソルで記述されます。
しかし、有限要素法では、マトリックス演算をするために、
テンソルをマトリックスやベクトルで記述して
計算に使用します。

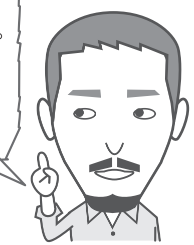


式(1.1)の $[\boldsymbol{D}]$ を応力–ひずみマトリックスという。要素にひずみが生じることにより、要素内部にはひずみエネルギーが蓄積される。ばねが伸びたり縮んだりして、元に戻ろうとしている状況を想像するとよい。ひずみエネルギー E_i は、応力ベクトル $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ とひずみベクトル $\{\varepsilon\}$ の内積を要素内で体積積分することによって得られる。

$$E_i = \frac{1}{2}\int_V \{\boldsymbol{\sigma}\}^T\{\varepsilon\}\mathrm{d}V \tag{1.2}$$

応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ とひずみ $\{\varepsilon\}$ の掛け算は、ベクトルの内積になるため、式(1.2)では応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ を転置して $\{\boldsymbol{\sigma}\}^T$ としている。

ベクトル $\{\boldsymbol{a}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$ と $\{\boldsymbol{b}\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$ の内積は
$\{\boldsymbol{a}\}\cdot\{\boldsymbol{b}\} = a_1b_1 + a_2b_2$ と計算されます。
これを行列の演算として表現すれば、$[a_1 \ \ a_2]\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$ となりますね。
したがってドットを使わない内積は、ベクトルの掛け算として
$\{\boldsymbol{a}\}^T\{\boldsymbol{b}\}$ と書くことができます。
意味していることはどれも同じです。



式(1.2)に式(1.1)を代入すると、内部ひずみエネルギーE_iをひずみベクトル$\{\varepsilon\}$と応力–ひずみマトリックス$[\boldsymbol{D}]$で表すことができる。

$$E_i = \frac{1}{2}\int_V ([\boldsymbol{D}]\{\varepsilon\})^T\{\varepsilon\}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T[\boldsymbol{D}]^T\{\varepsilon\}\mathrm{d}V \qquad (1.3)$$

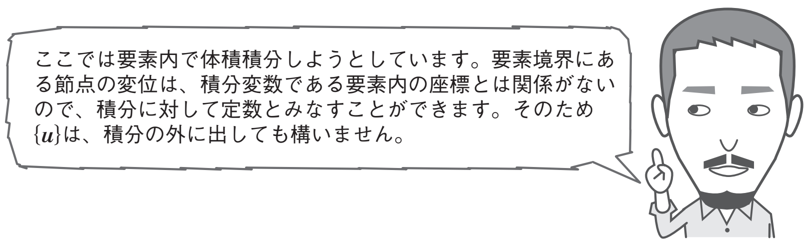
ここで、ひずみベクトル$\{\varepsilon\}$が節点変位ベクトル$\{\boldsymbol{u}\}$、および、あるマトリックス$[\boldsymbol{B}]$を使って式(1.4)のように書けるとする。つまり、ひずみベクトル$\{\varepsilon\}$は節点変位ベクトル$\{\boldsymbol{u}\}$の関数である。

$$\{\varepsilon\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u}\} \qquad (1.4)$$

式(1.4)を式(1.3)に代入すると、

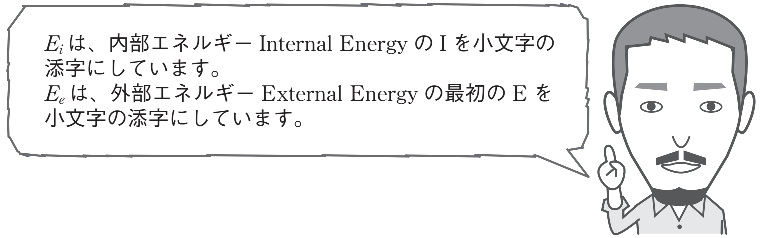
$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2}\int_V ([\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u}\})^T[\boldsymbol{D}]^T[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u}\}\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int_V \{\boldsymbol{u}\}^T[\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D}]^T[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u}\}\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\{\boldsymbol{u}\}^T\left(\int_V [\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D}]^T[\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V\right)\{u\} \qquad (1.5) \end{aligned}$$

と変形できる。



一方、外力は節点のみに与えられている。外力が要素にする仕事、すなわち外部エネルギーE_eは、節点変位ベクトル$\{\boldsymbol{u}\}$と節点外力ベクトル$\{\boldsymbol{f}\}$の内積として計算される。

$$E_e = \{\boldsymbol{u}\}^T\{\boldsymbol{f}\} \qquad (1.6)$$



節点変位ベクトル$\{\boldsymbol{u}\}$は、それぞれの節点の変位成分を並べたベクトルであり、節点外力ベクトル$\{\boldsymbol{f}\}$は、同じく節点に作用する外力成分を並べたベクトルである。式(1.6)は、仕事の定義にしたがって、力と変位を掛けて足し合わせているにすぎない。荷重が作用する対象は、離散化された有限個の節点なので、式(1.6)は積分ではなく、それぞれの荷重と変位の掛け算の和になっている。

要素が、外力あるいは強制変位により変形して静的に釣り合っているときは、内部エネルギーと外部エネルギーが等しいと考えてよい。つまり、

$$E_i = E_e \qquad (1.7)$$

である。しかし、式(1.7)は常に成立するわけではない。内部エネルギーと外部エネルギーの差Πを考え、

$$\begin{aligned} \Pi &= E_i - E_e \\ &= \frac{1}{2}\{\boldsymbol{u}\}^T\left(\int_V [\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D}]^T[\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V\right)\{\boldsymbol{u}\} - \{\boldsymbol{u}\}^T\{\boldsymbol{f}\} \qquad (1.8) \end{aligned}$$

このΠが最小すなわち0になるときが、エネルギーが釣り合っている状態である。Πの最小値を求めるために、式(1.8)を節点変位$\{\boldsymbol{u}\}$で微分する。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial\{\boldsymbol{u}\}} = \frac{\partial}{\partial\{\boldsymbol{u}\}}\left\{\frac{1}{2}\{\boldsymbol{u}\}^T\left(\int_V [\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D}]^T[\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V\right)\{\boldsymbol{u}\}\right\} - \frac{\partial}{\partial\{\boldsymbol{u}\}}(\{\boldsymbol{u}\}^T\{\boldsymbol{f}\}) \qquad (1.9)$$

式(1.9)は、$\{\boldsymbol{u}\}$のすべての成分u_iで微分することになるため、$\{\boldsymbol{u}\}$がn個の成分からなるとすれば、n元の偏微分方程式となる。煩雑になるので途中を省略するが、n元の連立方程式を解くと、結果として次式が得られる。