

● 1.1 二物体の接触

転がり軸受は軌道面と転動体が接触して、その間で荷重を支えているものですから、接触部分がどのような状態にあるかを知っておくことは必要なことです。そこでまず、もっとも簡単な形の接触として、玉と平面の接触について考えてみます。この場合、荷重が0のときには両者は一点で接触します（図1.1 (a)）。これに荷重が加わっていくと、この点で荷重を支えることになるのですが、幾何学的な「点」には面積がないので、ここの圧力は無限大ということになります。しかし無限大の圧力に耐えられる材料は存在しないので、接触部分は変形してある面積を持った「面」となり、それによって荷重を支えるようになります。玉と平面の接触の場合には、これは図1.1 (b) のような円形接触面となります。

荷重が小さい内は、この変形は材料が弾性的に変形する範囲の中で行われるので、荷重を取り除けば玉も平面も元の形に回復します。しかし荷重がさらに大きくなると接触面も大きくなりますが、変形の中に塑性変形分が次第に増えていき、荷重を除いても変形は完全に回復しなくなって圧痕が残るようになります。

玉軸受においてもこれと接触条件は似ていますが、玉と溝の形状との関係から、荷重が加わったときには図1.2のように楕円形（反り返っている）の接触面が生じます*。一般の転がり軸受の場合、二面の接触は材料の弾性領域で行われ

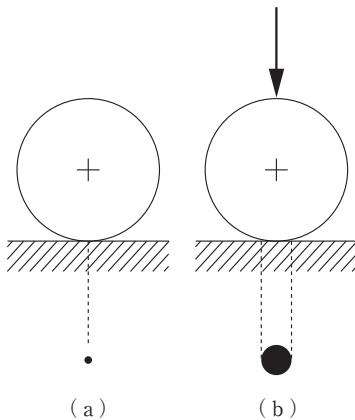


図1.1 玉と平面の接触

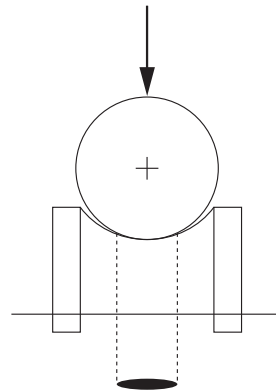


図1.2 玉と軌道溝の接触

* 荷重が0のときに点で接触する状態は点接触と呼ばれ、玉と平面、玉と軌道溝などの場合がこれに該当しますが、これらは荷重が加われば面で接触するようになります。また円筒と平面の接触のように荷重が0のときに線で接触する状態を線接触と呼びますが、これも荷重が加われば面で接触するようになります。

るのが普通で、接触の理論も弾性状態として扱われています。この弾性接触の理論は、ヘルツ (H. Hertz)¹⁾ が 1881 年に確立し、これが現在そのまま使われているので、接触面の大きさが二物体よりもはるかに小さいときの接触はヘルツ接触と呼ばれています。ここではこのヘルツの弾性接触理論を使って、玉軸受内部の接触の計算を行います。

● 1.2 仮定

ヘルツ接触の計算に当たっては、以下のような仮定がされています。なお、これらは実際の転がり軸受の内部においてもほとんど成立するものです。

- (1) 材料は均質である。
- (2) 接触部分の大きさは物体の大きさに比べて微小である。
- (3) 接触面に作用する力は接触面に垂直である (すなわち接触面内には摩擦がない)。
- (4) 変形は材料の弾性限度内で行われる。

● 1.3 接触面の大きさと接触圧力

ここではまず接触面の大きさと接触圧力についてのヘルツの計算を紹介しますが、玉軸受についてはパルムグレン (A. Palmgren)²⁾ がこれをさらに使いやすいように変形しているので、それについても述べることにします。

1.3.1 ヘルツの計算

ヘルツの計算は難解な上に長いので、ここではその結果だけを紹介します。必要な場合は原論文または詳解論文^{3, 7)} を参照してください。

玉と平面の接触面は円形となり、玉と軸受軌道溝との接触における接触面は楕円となりますが、円は楕円の特別な場合として、これらを一まとめにして扱うことができます。接触楕円の長半径を a (玉軸受では転がりと直角方向になります)、短半径を b (図 1.3) とすると、接触時のこれらの大きさは次のようにして

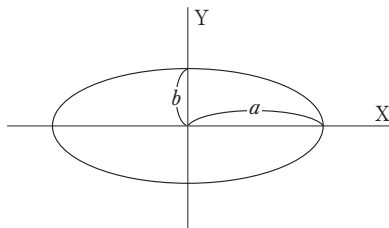


図 1.3 楕円の長半径と短半径

求められます。

いま、二物体が図 1.4 (a) のように接触しているとしますが、この図において 4 枚の平面 (1 の I、1 の II、2 の I、2 の II) はそれぞれ物体 1 および 2 の主曲率*を含む平面で、平面と物体が交わった線は 2 次式で表される曲線であるとしています。このときの接触の計算にはまず補助変数 $\cos \tau$ というものを計算しておきます。この補助変数は次のような形で算出されます。

$$\cos \tau = \frac{\sqrt{(\rho_{1I} - \rho_{1II})^2 + 2(\rho_{1I} - \rho_{1II})(\rho_{2I} - \rho_{2II}) \cos 2\omega + (\rho_{2I} - \rho_{2II})^2}}{\Sigma\rho} \quad (1.1)$$

ただし

$$\Sigma\rho = \rho_{1I} + \rho_{1II} + \rho_{2I} + \rho_{2II} \quad (1.2)$$

ここに ρ は接触物体の主曲率 (半径 r_{1I} 、 r_{1II} 、 r_{2I} 、 r_{2II} のそれぞれの逆数) で、凸面では正、凹面では負の符号を持ちます。また、添字の 1、2 は物体を、添字の I、II はその主曲率を含む平面を表しています。また式 (1.1) の中の ω は、図に示したように物体 1 の平面 1 の I と、物体 2 の平面 2 の I とがなす角 (または物体 1 の平面 1 の II と、物体 2 の平面 2 の II とがなす角) です。

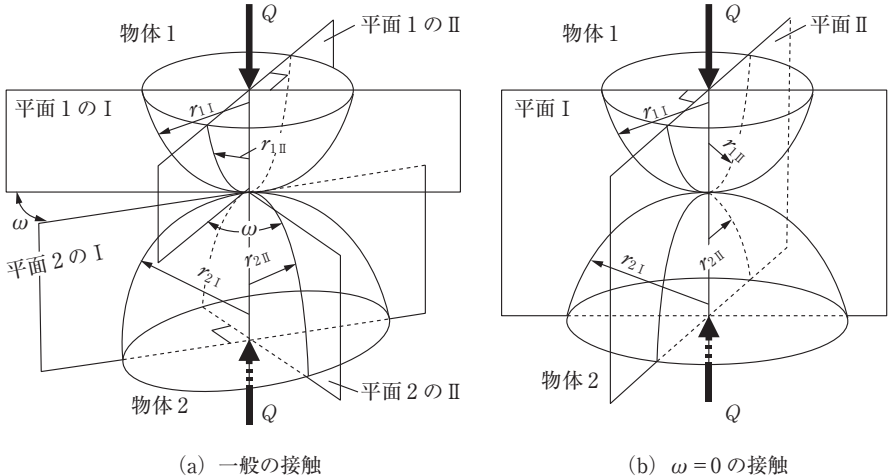


図 1.4 二物体の接触

* ここで考えている物体の一つについて接触点で内接する円を考えると、その半径には極大 r_I と極小 r_{II} とがあり、ヘルツ接触においてはこれらがお互いに直交しているものを対象としているのですが、これらの逆数 $1/r_I$ および $1/r_{II}$ を主曲率と言います。

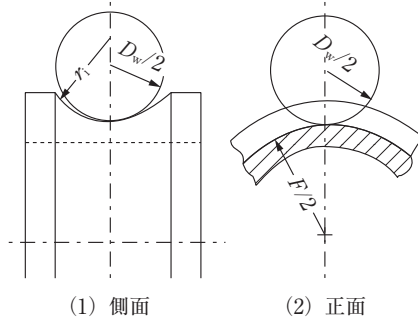


図1.5 内輪と玉の接触

転がり軸受では一般には図1.4 (b) のような接触が行なわれて $\omega=0$ となるので、このときには式 (1.1) は次のように簡単になります。

$$\cos \tau = \frac{|\rho_{1I} - \rho_{1II}| + |\rho_{2I} - \rho_{2II}|}{\Sigma\rho} \quad (1.3)$$

玉と軌道面との接触の場合は、内輪では図1.5のようになるので、それぞれの ρ は次のようになります。

$$\text{玉} : \rho_{1I} = \rho_{1II} = \frac{1}{(D_w/2)} = \frac{2}{D_w} \quad (1/\text{mm})$$

$$\text{内輪} : \rho_{2I} = -\frac{1}{r_1}, \quad \rho_{2II} = -\frac{1}{(F/2)} \quad (1/\text{mm})$$

なお、 ρ_{2I} は凹面なので負となっています。また外輪では ρ_{2I} も ρ_{2II} も凹面なので負となります。

式 (1.3) の $\cos \tau$ は接触部分の形状と寸法によって決まる値ですが、この値が決まると接触楕円の長半径 a と短半径 b は次の式から求められます (ヘルツの理論による)。

$$\left. \begin{aligned} a &= \mu \sqrt[3]{\frac{3 Q(\Theta_1 + \Theta_2)}{8 \Sigma\rho}} \quad (\text{mm}) \\ b &= \nu \sqrt[3]{\frac{3 Q(\Theta_1 + \Theta_2)}{8 \Sigma\rho}} \quad (\text{mm}) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

ここに Q は荷重 (N) であり、また、

$$\Theta_1 = \frac{4(1-1/m_1^2)}{E_1}, \quad \Theta_2 = \frac{4(1-1/m_2^2)}{E_2} \quad (1.5)$$

ですが、 E_1 , E_2 はそれぞれの物体の材料の縦弾性係数 (MPa) で、 $1/m_1$, $1/m_2$ はポアソン比です。なお、 $\Theta = (1-1/m^2)/E$ とした文献も多く、その場合には以

下の計算の係数が異なってくるので十分に注意して下さい。また、式 (1.4) の中の μ と ν は、接触の状態すなわち $\cos \tau$ によって決まる数です*。これを求める計算は面倒なので、 $\cos \tau$ から μ と ν を求める表または図ができていて、それにより求めることができます。

なお、接触面の形状は楕円となるので、その形を式で書くと、長半径 a 、短半径 b の楕円における任意の x 位置での外周の位置 y は、次の関係より求められます。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.6)$$

次に接触圧力 (平均接触圧力) p_m は、荷重 Q (N) を接触面積で割ればよいので、

* $\cos \tau$ と μ 、 ν との関係は完全楕円積分を媒介として次のように与えられます。

$$\cos \tau = \frac{(2-k^2)E - 2(1-k^2)K}{k^2 E} \quad (1.R1)$$

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{1}{1-k^2} \frac{2E}{\pi}} \quad (1.R2)$$

$$\nu = \sqrt[3]{(1-k^2)^{1/2} \frac{2E}{\pi}} \quad (1.R3)$$

ここに K 、 E はそれぞれ第一種および第二種の完全楕円積分で、次のような式で表される値ですが、積分値 K および E は数表¹⁾にも示されており、 k^2 だけで決まる値です。

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \quad (1.R4)$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi \quad (1.R5)$$

したがって接触部分の $\rho_{11} \sim \rho_{21}$ が決まれば式 (1.3) より $\cos \tau$ が決まるので、式 (1.R1) において k^2 を代入すると共に、式 (1.R4)、(1.R5) により決まる K と E を使用して等号が成立するようにすれば、その時の k^2 、 K 、 E によって式 (1.R2)、(1.R3) から μ 、 ν が求められます。また、この式 (1.R2)、(1.R3) の間には、

$$\frac{\nu}{\mu} = \sqrt{1-k^2} \quad (1.R6)$$

したがって、

$$k^2 = 1 - \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad (1.R7)$$

の関係があります。なお、完全楕円積分は、

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2 \varepsilon \sin^2 \phi}} \quad (1.R8)$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 \varepsilon \sin^2 \phi} d\phi \quad (1.R9)$$

という形で表して $\sin \varepsilon$ の関数とした数表もありますが、この場合は $\sin \varepsilon = k^2$ の関係にあります。

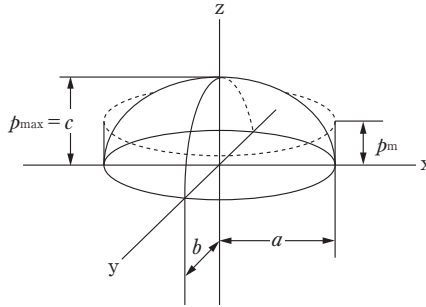


図 1.6 圧力の分布

$$p_m = \frac{Q}{\pi ab} \quad (\text{N/mm}^2 = \text{MPa}) \quad (1.7)$$

となります。また接触面内の圧力の分布は図 1.6 の実線のように回転楕円体を半分にした形となるのですが、その中の最大値すなわち最大接触圧力 p_{\max}^* は、式 (1.4) より、

$$p_{\max} = 1.5 p_m = \frac{3Q}{2\pi ab} = \frac{3Q^{1/3}}{2\pi\mu\nu} \sqrt[3]{\left(\frac{8\Sigma\rho}{3(\Theta_1 + \Theta_2)}\right)^2} \quad (\text{MPa}) \quad (1.8)$$

となります。なお、接触面内の任意の位置 (x, y) における圧力 p_z は、

$$p_z = \frac{3}{2} \frac{Q}{\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (1.9)$$

によって求められます。

1.3.2 計算の簡易化 (Palmgren の計算)

以上のようにヘルツの弾性接触理論によって接触面の大きさや圧力などが求められるわけですが、それには式 (1.4) などから分かるように、計算の度ごとに縦弾性係数 E やポアソン比 $1/m$ を代入しなければなりません。しかし通常の転がり軸受を対象とすれば材料は鋼としてよいので、 E や $1/m$ を代入しなくてもよいように式を作りかえておくことができます。それは Palmgren が次のように与えています²⁾。

いま、接触楕円の大きさを求める式 (1.4) の内、 a を求める式を例にとって次

* 接触面内の圧力を合計することを考えると、 $a, b, c(c=p_{\max})$ を直交軸とする回転楕円体の上半分の体積を求めることになり、その体積を V とすると、 $V = (4/3)\pi abc/2$ となります。これに対して接触楕円の面積 S は $S = \pi ab$ ですから c の平均値すなわち平均接触圧力 (p_m) は、 $V/S = 2c/3$ になります。これに対して接触圧力の最大値は $c(=p_{\max})$ ですから、両者の比をとると $(p_{\max}/p_m) = 3/2 = 1.5$ となります。