特集　製品開発に役立つ　機械構造を決めるための強度解析の知識

第4章

強度設計に役立つ弾性論，板，かくの公式

工学院大学　小久保　邦雄

二次元弾性論と応力集中

矩形平板が一様に引張りを受けると平板の断面の応力は一様であるが，**図 4.1** に示すように矩形板が円孔を有するときには円孔の A，A′部に大きな応力が生じる。1 章でも述べたように一般に剛性の不連続部や内力の方向の急変部があると応力集中が生じ，実際の強度設計ではもっとも注意しなければならない問題である。

このような応力集中の解析は，今では有限要素法を用いればそれほど困難なく行うことができる。これまでの多くの文献に解析結果，さらに光弾性実験データなどもまとめられているので，材料力学で求めた公称応力に対してこれらの結果を近似的に設計に利用することも考えられる。

薄板の場合には面内で荷重を受ける二次元弾性論（平面応力）の古典的な解法が利用されている。図 4.1 の板の $dx \times dy$ の微小部分を取り出し，この部分に作用する応力 σ_x，σ_y，τ_{xy} を考える。体積力は 0 の場合を考えると，x，y 方向の力のつり合いは応力を使って，

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0 \qquad (4.1)$$

と表される。また，ひずみの成分は x，y 方向の変位 u，v を用いて，次式で表される。

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}, \ \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4.2)$$

材料の性質はフックの法則により次式で表される。

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y), \ \sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y),$$

$$\tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \qquad (4.3)$$

E は縦弾性係数，ν はポアソン比である。式(4.1)～(4.3)の 8 個の方程式により未知数 8 個が求められ，与えられた境界条件の下に解を唯一に定めることができる。境界条件には外力が与えられている力学的境界条件と変位が与えられている変位の境界条件が存在する。

式(4.1)～式(4.3)から変数を消去して変位 u，v を未知数として解く方法が変位法であるが，よく用いられてきた古典的な解法はエアリー（Airy）の応力関数を用いた解法である。この解法ではエアリーの応力関数 F を使って，応力が次式で表現されるとする。

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \ \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad (4.4)$$

このとき，つり合いの式(4.1)は自動的に満足される。一方，3つのひずみは連続な2つの変位 u，v から導かれる量でなければならず，一定の条件を満足する必要があり，これは適合条件式と呼ばれる。応力は Hooke の法則によりひずみと関係づけられるため，このひずみの適合条件を満足するものでなければならない。この適合条件式に応力(4.4)を代入すると F は，

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}$$

$$+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=\Delta^2 F=0 \qquad (4.5)$$