

序論 数学の理解を助けるためのノウハウ

「はじめに」で、経験したことがなく、思考のテンプレートもない事象について理解するためには、想像力が必要であると書いた。それだけでは不親切である。以下に、筆者が考える想像力を拡げるためのノウハウを紹介する。

1. 低次元で考えよう

数学の教科書には、よく n 次元という言葉が出てくる。しかし、前述したように、人は経験を通して理解するので、普通の人は n 次元の世界が理解できない。よって多くはその時点で数学を放棄する。しかし、数学者もいきなり n 次元の世界を思い浮かべて理論を構築するのではなく、理論がまずは1次元で成り立つか考え、次に2次元、そして3次元で成立するならば、 n 次元でも成立するかを考える。数学者は一般化することが好きなので、 n 次元という言葉で議論する。しかし、われわれが直面する世界は3次元なので、 n 次元まで考えるに及ばない。

したがって、数学の本を読んでいき詰ったら、次元を下げて考えればよい。つまり

- n 次元から3次元へ、3次元から2次元へ、2次元から1次元へ

その反対に、たとえば、3次元の現象についての理論を理解したいのであれば、

- 点から直線へ、直線から平面へ、平面から立体へ

という順番で考えることを薦めたい。

2. 習うより慣れよう

1個5円の飴を3個買おうと思います。いくら用意すればよいでしょうか？

$5 \times 3 = 15$ とすぐ答えがでる。なぜだろう。理論的には5を3回足し算するから $5 + 5 + 5 = 15$ だ。それを毎回していたら面倒くさいし時間がかかる。それで掛け算が生まれ、一桁の掛け算を九九として覚えた。だから簡単に答えが出た。よく使う計算は暗記した方が楽だし速い。つまり計算脳のバイパスだ。掛け算の理屈を理解することは意識の世界のできごと、実際の掛け算を使った計算は

無意識の世界のできごとにも例えることができる。九九を利用した計算は慣れの問題である。

人が歩行するとき、最初にどちらか一方の足を出し、次に反対の足を出す。意識しているわけではなく“無意識”に歩行をおこなっている。無意識の行動だからスムーズに事が運ぶ。1個5円の飴を3個買うときも同じである。我々は、5を3回足す事を、無意識のうちに 5×3 という掛け算に置きかえている。

もうひとつ。時速 80km がどの程度速いのかは、普段車を運転している人であれば、体感的・直観的にわかる。しかし秒速 20m の速さと聞いても、どの程度の速さかは一瞬ではわからない（よく考えればわかる）。なぜか？ 普段スピードを体感している車の速度計が、秒速でなく時速だから。これも慣れの問題。

微分・積分、複素数も同じことである。

3. 演算は計算方法でなく、機能で理解しよう

たとえば、所得税率が 20 % で、徴税された金額が 60 万だった。このときの所得はいくらでしょうか？ という問題に対して、読者はどう考えるだろうか。

所得の 20 % が 60 万だから、100 % に相当する金額は $60 \text{ 万} \times 100 / 20 = 300 \text{ 万}$ 。したがって所得は 300 万。誰でも簡単に答えるだろう。

では次の問題はどうか？

ある年の米の収穫量は、12 人家族のうち 7 人を養うのに必要な量だった。では家族全体を食べさせるのに必要な米の量は、その年の収穫量の何倍あればよいか？

$$\text{答え：} 1 \div (7/12) = 1 \times 12/7 \doteq 1.7 \quad (1)$$

なぜこのような式を考えたのか？ (1) 式の説明の前に、簡単な類似問題に置き換えて考えてみる。

ある年の米の収穫量が 100kg で、家族の 25 % を養うために必要な量であったとすれば、家族全体が食べていくために必要な米の量はいくらか？ これは簡単だ。

$$\text{答え：} 100 \div 0.25 = 400 \text{kg}$$

同じように、ある年の米の収穫量を「1」とすれば、家族全体の $7/12$ を養うのに必要な量だったから、1 を $7/12$ でわればよい、ということになる。

ここで重要なのは、 $7/12$ で割れば家族全体の必要量が求まる、ということ

である。割るというのは、全体である「1」に相当する量を求める演算であることを理解していることが必要である。

では次の問題は？

30kg の米があるとして、15 人で分けるとひとりあたりはいくらか？

答え： $30\text{kg} \div 15 \text{人} = 2\text{kg}$

小学生の問題だからわからない方がおかしい。

さて、次の問題はどうか？

0.5kg の米があるとして、0.3 人で分けると、1 人あたりはいくらか？

答え： $0.5\text{kg} / 0.3 \text{人} = 1.67 \text{kg}$

はて？ と思った人もいるかもしれない。普通に考えると、そもそも 0.3 人ということが物理的、生物的に意味がわからないからだ。しかし 0.3 人が大人の 30% しか食べない子供のことで、1 人あたりとは大人ひとりあたりを意味する、と問題を置き換えて考えれば問題として成立するだろう。そうすれば、0.3 に対する 1 を求める問題として計算できる。

以上のことから、割り算という演算は「1」より大きな値で割るときは、「1」を単位としたときの単位当たりの量を求めることであり、「1」未満の値で割るときは、「1」を全体とする量を求めることなのである。後述するように、掛け算は面積計算のイメージが理解を助けるが、割り算の場合、特に、分数が入ってくると割り算を図で説明することは難しい。しかし、機能で考えれば理解しやすいのではないだろうか。

同様に、指数関数や対数関数も機能で演算の意味を理解するのが良いだろう。

4. 数学は自ら拡張することを覚えておこう（はじめは自然数しか存在しなかった）

大昔、人間は自然数しか知らなかった。しかも、十本の指しかなかったので、物を数えるとき、それ以上の数を数えることができなかった。しかし十をひとつの単位にする十進法を思いつくと、十以上の数も数えることができるようになり、百、千、・・・と、数は無限に存在することを理解するようになった。

また、0 という概念もなかった。なにもない、のは数として認められなかった。三十五という数を十が 3 個と一が 5 個と口で言っているうちは「0」がなくても良かったけれど、その計算を紙に書いて説明しようとするれば「0」という数

字を認めて $30+5=35$ とした方が便利なのに気づいた。そして「なにもない」0 を数字の仲間に入れてあげないと計算が成立しなくなることを理解するようになった。すると、0 と 1 の間の数字、つまり少数も数の仲間となるようになっていった。

さらに同じ値を 2 乗して 2 となるような値はなにか？ という問題、もっと身近な例で言えば、面積が 2 となるような正方形の 1 辺の長さあるいは 1 辺が 1 の正方形の対角線の長さを求める問題を解くにあたって、その値や長さが、整数でも少数でも分数でも表現できないことに気づいた。そこで先人たちは、無理数という新しい数を作ったのだった。

2 乗して 2 となる数を新たに作ることが許されるなら、2 乗して -1 となる数があっても良いだろうということで虚数が生れた。そして実数と虚数との組み合わせで複素数が生れた。

こうして、人類は、新しい数を思いついていった。数だけではなく三角関数、指数関数など、人類には、新しい数、新しい関数、新しい演算を拡張していく性癖がある。特に、数学者と呼ばれる人たちはその傾向が強い。彼らによって、新しい数、関数、演算についての概念が創造され、拡張、一般化、抽象化されていった。したがって、彼らの書いた書籍を読むときにはそのことを念頭に置いて読んだ方がよい。

孫子の兵法に「彼を知り己を知れば百戦殆うからず」ということばがあるが、これを振って言えば「数学（者）の性格を知らずんば、百年勉強しても理解危うし」ということになるだろう。

5. イメージで理解しよう

先ほど、経験しないことは理解できない、と書いた。経験とは実際に見たり聞いたりおこなったりすることであるが、多くの人はその大部分を視覚的に認知する。演算をイメージで理解するとは、面積は掛け算を使って求める、というようなことである。偏微分や全微分などは図を書かなければ、その意味するところを理解するのは難しいと思う。

少数や分数の割り算あるいは複素数のように、イメージで理解するのが困難な演算もあるが、イメージを獲得できる演算は、数学的整合性のための複雑な理論は後にまわし、まずは数、関数、演算の意味するところをイメージで理解することが早道だと考える。

「 ε - δ 論法」なんてくそくらえ

大学の解析学の講義で最初に学ぶのは、微分や積分ではなく、数や関数の連続性といった数についての基本概念である。たとえば、いわゆる極限、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

について、高校数学では「 x が限りなく a に近づくとき、 $f(x)$ は限りなく A に近づく（収束する）」と表現する。この記述は直観的でわかりやすい。しかし、大学の講義では、同じことを「任意の正の実数 ε に対して、ある正の実数 δ が存在して、 $|x-a| < \delta$ なら $|f(x)-A| < \varepsilon$ となる」と説明する。 $A=f(a)$ であれば、関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続ということになる。これがいわゆる「 ε - δ 論法」である。

「 ε - δ 論法」によって、筆者をはじめとして工学部の多くの学生が数学から脱落する。なぜこのようなもったいぶった記述をするのだろうか？ 答えは、理論の客観性を担保するためである。たとえば、関数、

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (*) \text{ (下図参照)}$$

は、 $x \rightarrow 0$ で $f(x) \rightarrow 0$ に収束しないから、 $x=0$ で不連続である。このことが直観的に理解できない人のために、数学は次のような説明を用意する。

図 $x=0$ で不連続

