

# 第1章

## 非線形構造解析とは

筆者が、カスタマーサポートを担当していたときのソフトウェアベンダーのキャッチフレーズに、“Nature is non linear.”という言葉があった。この言葉は物理現象をうまく表現しており、補足を含めると「自然界は非線形であり、自然界に存在する構造物の力学的特性を知るためには、非線形有限要素法による解析が必要である。」と訳することができる。

固体力学における非線形有限要素法は大きく、材料非線形、幾何学非線形、境界条件非線形の三つに分類される。本書の序論として、三つの非線形性について本章で簡潔に述べる。

- 1.1 非線形応答
- 1.2 材料非線形
- 1.3 幾何学非線形
- 1.4 境界条件非線形



# 1.1 非線形応答

「非線形」とは本来、数学の用語であり、「線形でない応答」を意味する。ある構造物の荷重と変位の応答が、なんらかの要因によって図 1.1 に示す実線のような曲線で示される場合、その系（システム）は「非線形応答である」という。一方、点線のような直線で示される応答は「線形である」という。線形の場合、システムの剛性を  $K$  で表したとき荷重  $P$  と変位  $u$  は次の式で表される。

$$K \times u = P, \quad K = \text{const} \quad (1.1)$$

このとき、 $K$  は一定の値となる。しかし、非線形の場合には剛性  $K$  がその時の変位や負荷されている荷重などに依存し、一定ではない値となる。

$$K(u, P) \times u = P, \quad K(u, P) \neq \text{const} \quad (1.2)$$

非線形応答におけるシステム剛性  $K$ 、すなわち増分区間での傾きを接線剛性 (tangent modulus) ともいう。

$$K = \frac{dP}{du} \quad (1.3)$$

固体力学では、この剛性が変化する要因として、材料非線形、幾何学非線形、境界条件非線形の三つに大きく分類される。

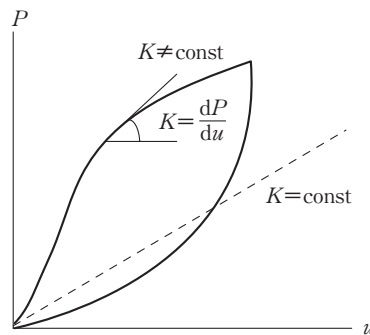


図 1.1 非線形と線形

# 1.2 材料非線形

材料に荷重を負荷した場合、変形が生じるが、荷重を除荷した際に永久変形が残る場合があり、これを非弾性変形という。本節では、いくつかの代表的な材料非線形挙動 (material non linearity) について簡潔に示す。

## 1.2.1 弾塑性挙動

一般的な金属材料に見られる、典型的な非弾性変形の一つである弾塑性挙動 (elasto plastic behavior) を図 1.2 に示す。

最初、材料に外力が負荷されたとき、ヤング率  $E$  の傾きで、応力  $\sigma$  とひずみ  $\varepsilon$  の関係は線形となる。さらに、外力が負荷されて a 点まで変形が進み、応力がある一定値  $Y$  を超えたとき、材料は弾性変形を超えて塑性変形する。一定値  $Y$  を降伏点 (yield stress) といい、a 点から b 点の間の荷重変位関係は非線形となる。

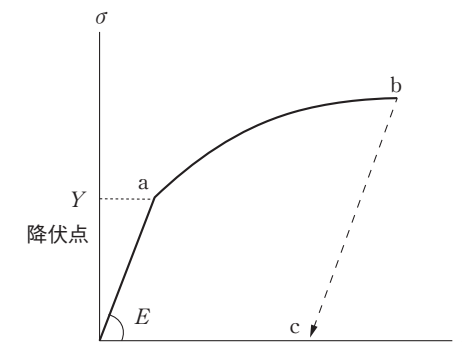


図 1.2 弾塑性挙動

## 1.2.2 ひずみ速度依存性弾塑性挙動

前節では、速度に依存しない弾塑性挙動を想定したが、応力速度あるいはひずみ速度に依存する状態を考慮しなければならない場合がある。一般的に、金属材料は図 1.3 に示すように、ひずみ速度  $\dot{\epsilon}$  に依存して弾塑性挙動が変化する。この様な材料をひずみ速度依存性材料 (rate dependent behavior) という。図は模式的に  $c > b > a$  の順でひずみ速度が大きくなった場合の弾塑性挙動を示している。これを粘弾塑性挙動 (visco elastic plastic behavior) ともいう。

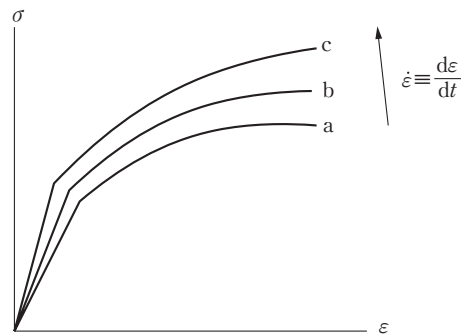


図 1.3 ひずみ速度依存性

様々な速度場での応答をすべて解明したいのなら、こうした速度依存性の材料の設定が必要になります。しかし、対象とする現象が、ある一定速度の下であれば、その速度場での応力-ひずみ曲線で解析を行い、定性的に評価を行うようです。なにしろ実験が大変ですから。なお、図 1.3 内の式  $\dot{\epsilon} \equiv d\epsilon/dt$  のように、ある変数の上にドット(・)が付く場合、それは式で示されているように時間で微分することを意味します。この場合、ひずみを時間微分しているので、ひずみ速度となります。



## 1.2.3 クリープ挙動

一定の作用荷重  $\sigma$  の基で時間とともに変形が進行する現象をクリープ挙動 (creep behavior) といい、粘性変形ともいう。高温状態では金属材料においても、クリープ現象が見られ、構造物の代表的な非線形挙動として挙げられる。図 1.4 は模式的に  $c > b > a$  の順で作用力が大きくなった場合のクリープによるひずみの進展速度を示している。

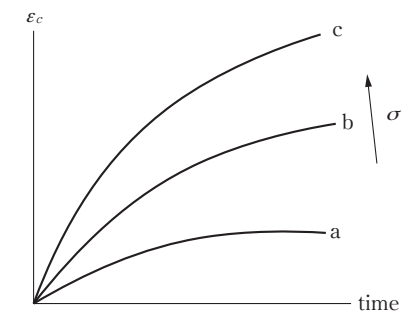


図 1.4 クリープ挙動

creep とは、英語の動詞で、「ゆっくり進む」「じわじわと忍び寄る」という意味です。同じ長さのナイロンの糸に様々な重さの重りをぶら下げて一晩放置しておくとう伸びている現象が見られます。このとき、重りが重いほど(作用荷重が大きいほど)伸びが大きくなります。これが図 1.4 の  $c > b > a$  の関係です。



### 1.2.4 超弾性挙動

弾性変形であるが、応力とひずみが非線形な関係となる場合、その材料を超弾性挙動 (hyper elastic behavior) として扱う場合がある。超弾性体の単軸引張での典型的な挙動は、**図 1.5** に示す S 字カーブ状の応力—ひずみ曲線となり、負荷時と除荷時で同じ曲線をたどる材料として理想化して定義される。現実の材料としては、ゴム材料などが超弾性体としてモデル化される。

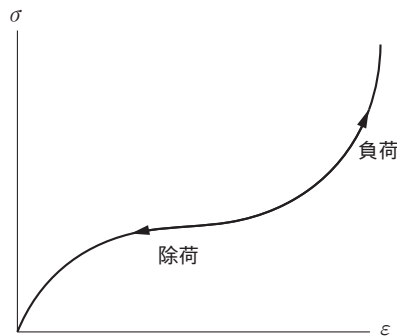


図 1.5 超弾性挙動

本当は、ゴム材料は負荷時と除荷時でわずかに異なる挙動を持ち、ヒステリシスを描きます。しかし一般的な静解析では、理想化した状態で超弾性体として扱われます。また、ゴム材料がダメージを受けて、剛性が低下する現象 (Mullins効果<sup>[1]</sup>) を解かなければならない場合もあり、損傷を表す材料モデルも多数存在します。<sup>[2][3]</sup>



## 1.3 幾何学非線形

一般に、構造物に外力が負荷されることで変形する。形状が変形することや、応力が発生することで、構造物の剛性が変化する非線形性を幾何学非線形 (geometry non linearity) という。典型的な例を**図 1.6** に示す。浅いアーチ型の形状を持つ構造物に外力を負荷すると、**図 1.7** に示すように荷重  $P$  と変位  $u$  が非線形な関係となる。幾何学非線形を考慮すると接線剛性  $K$  は

$$K = K_{mat} + K_{stress}$$

と分解される。ここで、 $K_{mat}$  は材料による剛性であり、 $K_{stress}$  は外力が負荷されたことによる形状の変化、あるいは負荷された応力の変化による剛性であり、初期応力マトリックス (initial stress matrix) という。**図 1.6** の場合、構造物に対して圧縮力が作用するためシステム全体としては圧縮場 (負値) となる。それに伴い  $K_{stress}$  はマイナスの剛性となるため、**図 1.7** の a 点近傍での接線剛性  $K$  がゼロに近くなり、求解できなくなる。この状態を非正定マトリックス (non positive matrix) といい、座屈現象の大きな要因となる。特に、**図 1.7** に示す挙動を飛び移り座屈 (snap through) という。

「幾何学非線形」とかっよく呼びますが、枕詞を付けて「(それまでの負荷によって変化した形の) 幾何学非線形」と考えて下さい。

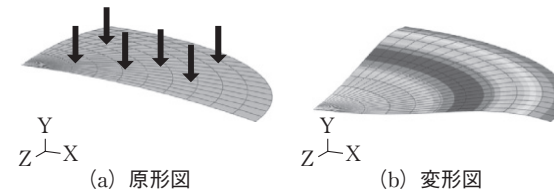


図 1.6 浅いアーチの飛び移り座屈変形

